Konvergenz CG-Verfahren

$$x^k = x^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d_i = x_0 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i\right) d_0$$

$$= x_0 + \underbrace{\left(\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1}\right)}_{=: p(A)} d_0 \quad , p \in P_{k-1}$$

Min. ist äquivalent zur Suche eines Polynoms $p(A) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i$, d.h. zur Suche der $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$

$$\min_{y \in x_0 + K_k} Q(y) = \frac{1}{2} \min_{y \in x_0 + K_k} \| b - Ay \|_{A^{-1}}^2$$

Aus Satz 7.33

$$Q(y) = \frac{1}{2} \| Ay \|^2 - \langle b, y \rangle$$

Mit $\| x \|_{A^{-1}} := \langle A^{-1} x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$

$$\min \| b - Ay \|_{A^{-1}}^2 = \min \langle \underbrace{A^{-1}(b - Ay)}_{= x}, b - Ay \rangle$$

$$= \min \langle x - y, A A^{-1} (b - Ay) \rangle$$

$$= \min \langle x - y, A(x - y) \rangle$$

$$= \min \langle A(x-y), x - y \rangle = \min \| x - y \|_A^2$$

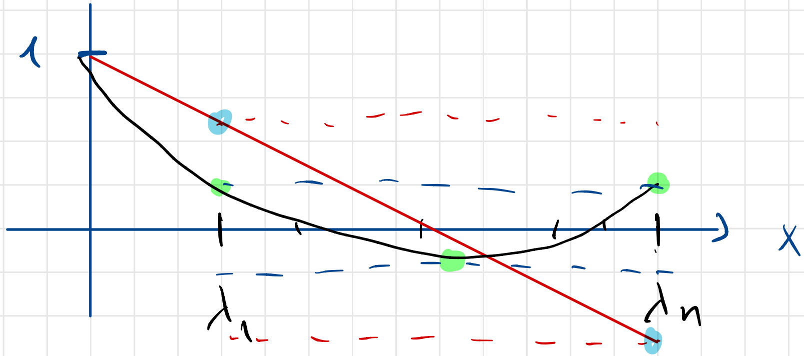
$$\Rightarrow \min_{y \in x_0 + K_k} \| x - y \|_A = \min_{p \in P_{k-1}} \| x - (x_0 + p(A)(b - Ax_0)) \|_A$$

$$= \min_{p} \| (x - x_0) - p(A) A (x - x_0) \|_A$$

$$= \min_{p} \| \underline{\underline{(I - p(A) A)}} (x - x_0) \|_A$$

$\Rightarrow$ Satz 7.34

Suche: $\min_{p \in P_k, p(0)=1} \max_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]} |p(\lambda)|$



$P \in P_k$ ist dann Best-Approx in Max-Norm, wenn es $k+1$ Stellen gibt, wo der max Fehler mit alternierendem Vorzeichen angenommen wird.

Schwer, da $|\cdot|_{max}$ nicht durch Skalarprodukt gegeben ist.

A posteriori Fehlerschätzung

$$\|\nabla(u-u_n)\| = \sup_{\varphi\in H_0^1} \frac{R_n(u_n)(\varphi)}{\|\nabla\varphi\|}$$

$$R_n(u_n)(\varphi) = R_n(u_n)(\varphi) - \underbrace{R_n(u_n)(\varphi_n)}_{=0}$$

$\varphi_n \in V_n$ beliebig

$$= (f, \varphi-\varphi_n) - (\nabla u_n, \nabla(\varphi-\varphi_n))$$

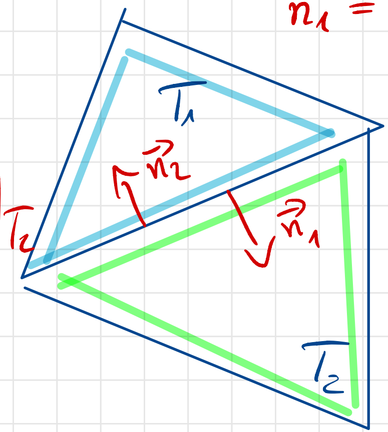
$$= \sum_{T\in\Omega_n} \left(\int_T f(\varphi-\varphi_n)\,dx - \int_T \nabla u_n \cdot \nabla(\varphi-\varphi_n)\,dx \right)$$

$$= \sum_{T\in\Omega_n} \left(\int_T (f + \underbrace{\Delta u_n}_{=0 \text{ bei lin. FE}})(\varphi-\varphi_n)\,dx - \int_{\partial T} (\vec{n}_T \cdot \nabla u_n)(\varphi-\varphi_n)\,ds \right)$$

Def Kantensprung:

$$[n_E \cdot \nabla u_n] = n_1 \cdot \nabla u_n\big|_{T_1} - n_2 \cdot \nabla u_n\big|_{T_2}$$

$n_1 = -n_2$



$$= \sum_{T \in \Omega_n} \left(\int_T (f + \Delta u_n)(\varphi - \varphi_n)\,dx - \frac{1}{2} \int_{\partial T} [n_E \cdot \nabla u_n](\varphi - \varphi_n)\,ds \right)$$

$$\Rightarrow \quad |R_n(u_n)(\varphi_n)| \leq \sum_{T \in \Omega_n} \Big(\|f + \Delta u_n\|_T \cdot \|\varphi - \varphi_n\|_T$$

$$+ \frac{1}{2} \|[n_E \cdot \nabla u_n]\|_{\partial T} \cdot \|\varphi - \varphi_n\|_{\partial T} \Big)$$

Idee zu $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ wähle Clement Interpolation

$$\varphi_h = C_h \varphi \in V_h \quad \text{mit:}$$

$$\|\varphi - C_h \varphi\|_T \le c \cdot h^1 \|\nabla^1 \varphi\|_T$$

$$\|\varphi - C_h \varphi\|_{\partial T} \le c \, h^{1/2} \|\nabla^1 \varphi\|_T$$

Bei lin. FE: $\|v - I_h v\|_T \le c h^2 \|\nabla^2 v\|_T \quad v \in H^2(T)$

Aber: $\varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \varphi \notin H^2(T)$

Und: die (Lagrange)-Interpolation ist für $v \in H^1$ nicht definiert!

Punktwerte.

$$\varphi = C_n \psi$$

$$\Rightarrow$$

$$|R_n(u_n)(\varphi_n)| \le \sum_{T \in \Omega_n} c \left(\|f + \Delta u_n\|_T \, h \, \|\nabla \varphi\|_T + \frac{1}{2} \|[n \cdot \nabla u_n]\|_{\partial T} \, h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_T \right)$$

$$= c \sum_{T \in \Omega_n} \left(h_T \|f + \Delta u_n\|_T + \frac{1}{2} h_T^{\frac{1}{2}} \|[n \cdot \nabla u_n]\|_{\partial T} \right) \|\nabla \varphi\|_T$$

$$= \langle - , - \rangle$$

$$\le c \left(\sum_{T \in \Omega_n} \left(h_T \|f + \Delta u_n\|_T + \frac{1}{2} h_T^{\frac{1}{2}} \|[n \cdot \nabla u_n]\|_{\partial T} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{T \in \Omega_n} \|\nabla \varphi\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\|\nabla\varphi\|_\Omega}$$

$$\leq 2c \Bigg(\sum_{T\in\Omega_n} \underbrace{h_T^2 \|f + \Delta u_n\|_T^2}_{=:\,\eta_T^2} + \overbrace{\tfrac{1}{4} h_T \|[n\cdot\nabla u_n]\|_{\partial T}^2}^{=:\,\eta_{\partial T}^2} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\nabla\varphi\|_\Omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|R_n(u_n)(\varphi)|}{\|\nabla\varphi\|} \leq \frac{2c \left(\sum_{T\in\Omega_n} \eta_T^2 + \eta_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cancel{\|\nabla\varphi\|_\Omega}}{\cancel{\|\nabla\varphi\|}}$$

$$\Rightarrow \quad \|\nabla(u - u_n)\| = \sup_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} \frac{R_n(u_n)(\varphi)}{\|\nabla\varphi\|} \leq 2c \left(\sum_{T\in\Omega_n} \eta_T^2 + \eta_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Unterschied zu a priori:

- ρ_T und $\rho_{\partial T}$ können ausgewertet werden.
- Nur die Konstante der Interpolation.
- der Fehler liegt lokalisiert vor, d.h

$$\rho^T := \rho_T^2 + \rho_{\partial T}^2$$

Bei a priori: $\|\nabla(u-u_h)\| \le c_i h^r \|\nabla^{r+1} u\| \le c_i c_s h^r \|f\|_{H^{r-1}}$

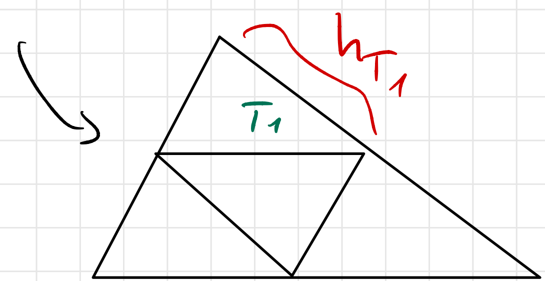
Vereinfacht

lin. FE

keine Sprünge, $f=1$

$$\|\nabla(u-u_n)\| \approx \left(\sum_{T\in\Omega_n} h_T^2 \, \|f\|_T^2\right)^{1/2}$$

$T \rightsquigarrow T_1, T_2, T_3, T_4$



$$\varrho_T^2 = h_T^2 \cdot \|f\|_T^2 \approx h_T^2 \, |T| \approx h_T^4$$

$$\varrho_{T_i}^2 = h_{T_i}^2 \, \|f\|_{T_i}^2 = h_{T_i}^2 \, |T_i|^2 \approx \frac{1}{4} h_T^2 \, \frac{1}{4} h_T^2 = \frac{1}{16} h_T^4$$

$$S_{T_1}^2 + S_{T_2}^2 + S_{T_3}^2 + S_{T_4}^2 \approx \frac{4}{16} h_T^4 \approx \frac{1}{4} S_T^2$$

bei lin. FE: Halbieren von h halbiert summierten Fehler