Institut für Analysis und Numerik 14.04.2023
Universität Magdeburg
Thomas Richter thomas.richter@ovgu.de

Übung Nr. 1 zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2023

Aufgabe 1.1:

Wir betrachten die Funktion $f : B_1 \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, gegeben als

$$f(x) := \|x\|^\alpha$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$. Dabei ist B_1 die d-dimensionale Einheitskugel.

a) Für welche α, in Abhängigkeit von der Dimension d gilt

$$f \in H^1(B_1)?$$

b) Der Raum $W^{n,p}(\Omega)$ ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$ definiert als

$$W^{n,p}(\Omega) = \{\phi \in L^p(\Omega),\ \nabla^k\phi \in L^p(\Omega) \text{ für } k = 1, \dots, n\}.$$

Dabei bezeichnen wir mit ∇^k alle k-ten Ableitungen der Funktion. Für welche n und p, in Abhängigkeit von der Dimension d, gilt

$$f \in W^{n,p}(B_1)?$$

Aufgabe 1.2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Das Randstück $\Gamma \subset \partial\Omega$ habe positive Länge $|\Gamma| > 0$. Für Funktionen

$$u \in H^1_0(\Omega; \Gamma) := \{\phi \in H^1(\Omega) \,|\, u = 0 \text{ auf } \Gamma\}$$

beweise man die Poincaré Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega; \Gamma)$$

Wir hängt die Konstante c von Ω und Γ ab? Für den Beweis kann die Aussage vereinfacht werden: Nehmen Sie an, dass das Gebiet Ω konvex ist, z.B. ein Kreis oder ein Rechteck.

Aufgabe 1.2:

Für Funktionen $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ beweise man die *Spurabschätzung*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\Big)$$

Wovon hängt die Konstante c ab?

Aufgabe 1.3:

Wir betrachten den Raum

$$\bar{H}^1(\Omega) := \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega u \, dx = 0\}.$$

Man beweise die Poincaré-Abschätzung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\| \quad \forall u \in \bar{H}^1(\Omega).$$

Hinweis: Der Beweis wird nicht direkt geführt sondern über ein Widerspruchsargument. Konstruiere Sie eine Funktionenfolge, $v_n \in \bar{H}^1(\Omega)$, welche die Ungleichung nicht erfüllt, d.h. z.B. eine Folge mit der Eigenschaft $\|v_n\| \geqslant n\|\nabla v_n\|$. Dies können Sie zu einem Widerspruch führen, wenn weiter angenommen wird, dass v_n im Mittelwert stets Null ist.

Besprechung der Übungen in der kommenden Woche.
Abgabe zur Korrektur und für Feedback per Mail an `thomas.richter@ovgu.de`.