Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
thomas.richter@ovgu.de

21.04.2023

Übung Nr. 2 zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2023

Aufgabe 2.1:

Man zeige, dass eine lineare Finite Elemente-Funktion, d.h. eine stetige Funktion, die auf jedem Element $T \in \Omega_h$ ein lineares Polynom ist, im Raum $H^1(\Omega)$ liegt.

Hinweis: Die Aufgabe ist einfach mit dem Konzept der "schwachen Ableitung" zu lösen. Wir wollen aber eine Folge konstruieren. Hierzu betrachte man die Funktion $f(x, y) = |x|$, *die einen Knick zwischen zwei Elementen darstellt und zeige, dass diese, z.B. auf* $[-1, 1] \times [0, 1]$ *in* H^1 *liegt, indem eine geeignete Folge konstruiert wird.*

Aufgabe 2.2:

Es sei Ω_h ein Dreiecksgitter. Man zeige, dass die folgenden Bedingungen der Formregularität äquivalent sind:

1. Die Innenwinkel aller Dreiecke sind durch $\alpha_{max} < 180°$ gleichmäßig nach oben beschränkt.
2. Die Innenwinkel aller Dreiecke sind durch $\alpha_{min} > 0°$ gleichmäßig nach unten beschränkt.
3. Das Verhältnis zwischen Radius von Umkreis durch Radius des größten eingeschriebenen Kreises ist gleichmäßig nach oben beschränkt
$$\frac{d(T)}{\rho(T)} \leqslant C$$
4. Das Verhältnis aus längster und kürzester Seite ist gleichmäßig beschränkt
$$\frac{h_{max}}{h_{min}} \leqslant C$$

Aufgabe 2.3:

Bei den obigen Bedingungen ist die "Gleichmäßigkeit" wichtig. Sie bedeutet, dass es nicht nur eine Konstante für alle Dreiecke $T \in \Omega_h$ eines Gitters geben muss, sondern dass die Konstante für die ganze Familie von Gittern Ω_h $(h > 0)$ beschränkt bleiben muss. Wann kann der Grund dafür sein, dass die Robustheit gegenüber $h \to 0$ gefordert wird?

Aufgabe 2.4:

Wir betrachten die Gleichung

$$-\Delta u + \alpha u = f \text{ in } \Omega,\ \ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit einem $\alpha > 0$. Man leite die variationelle Formulierung her und zeige, dass die Matrix der Galerkin-Methode immer positiv definit symmetrisch ist.

Besprechung der Übungen in der kommenden Woche.
Abgabe zur Korrektur und für Feedback per Mail an `thomas.richter@ovgu.de`.