Institut für Analysis und Numerik 28.04.2023
Universität Magdeburg
Thomas Richter thomas.richter@ovgu.de

**Übung Nr. 3 zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen**
**Sommersemester 2023**

**Aufgabe 3.1:**

**a**) Man zeige, dass der allgemeine Lagrange Ansatz $r$-ter Ordnung, d.h. der Polynomraum $P(T) = P^r(T)$ mit den im Dreieck gleichmäßig verteilten Knotenfunktionalen unisolvent ist.

Man argumentiere weiter, dass dieser Ansatz global stetig und somit $H^1$-konform ist.

*Hinweis: Zur Position der Knotenfunktionale kann man sich vorstellen, dass das Dreieck in kleinere Dreiecke zerlegt ist. Bei einem Ansatz von Grad* $r$ *haben diese jeweils die Kantenlänge* $h_i/r$ (*mit den 3 Kantenlängen* $h_1, h_2, h_3$ *von T*).

**b**) Man zeige, dass das Morley-Element unisolvent ist. Es gilt $P(T) = P^2$ und die Knotenfunktionale sind die Funktionswerte in den drei Eckpunkten sowie die Vorgabe der Normalableitung in den drei Kantenmitten.

**Aufgabe 3.2:** **a**) Man stelle die allgemeine Referenz-Transformation für Dreieicke und Vierecke auf, d.h.

$$T_T : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\} \to < a_1, a_2, a_3 >$$
$$T_K : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x, y < 1\} \to < a_1, a_2, a_3, a_4 >,$$

dabei bezeichnet $< a_1, a_2, a_3 >$ das Dreieick mit 3 Punkten in allgemeiner Lage und $< a_1, a_2, a_3, a_4 >$ das Viereck mit je 3 Punkten in allgemeiner Lage.

*Hinweis: die Transformationen können sehr einfach angegeben werden, wenn sie mit Hilfe der Basisfunktionen auf den Referenzelementen ausgedrückt werden.*

**b**) Man erstelle jeweils die inverse der Transformation. In welchem Funktionenraum liegen diese jeweils?
Man betrachte z.B. das Viereck $< (0,0), (2,0), (0,1), (1,1) >$.

---

**Besprechung** der Übungen in der kommenden Woche.
**Abgabe** zur Korrektur und für Feedback per Mail an `thomas.richter@ovgu.de`.