Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter 12.05.2023

thomas.richter@ovgu.de

Übung Nr. 5 zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2023

Aufgabe 5.1:

T sei ein Dreieck, $v \in H^m(T)$. Wir interpolieren in den Raum P^{m-1}. Man zeige die Abschätzungen

$$\|u - I_T u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant ch^{r+\frac{1}{2}}|u|_{H^m(\Omega)}, \quad \|\partial(u - I_T u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant ch^{r-\frac{1}{2}}|u|_{H^m(\Omega)}.$$

Aufgabe 5.2: Es sei V_h ein Finite-Elemente Raum von Ordnung $m-1$. Man zeige die inversen Abschätzungen

$$\|\nabla^k u_h\|_T \leqslant ch^{s-k}\|\nabla^s u_h\|_T \quad \forall 0 \leqslant s \leqslant k \quad \forall u_h \in V_h$$

sowie, in einem d-dimensionalen Raum

$$\max_T |u_h| \leqslant ch^{-\frac{d}{2}}\|u_h\|_{L^2(T)} \leqslant c' \max_T |u_h|,$$

mit Konstanten $c > 0$ und $c' > 0$.

Aufgabe 5.3: Es sei $V_h \subset H^1_0(\Omega)$ der Raum der Finiten Elemente von Grad r. $u \in H^{r+1}(\Omega)$ sei die Laplace-Lösung und $u_h \in V_h$ die Finite Elemente Approximation. Mit Hilfe des Aubin-Nitsche Tricks zeige man die Anschätzung

$$\left|\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (u - u_h)\,dx\right| \leqslant ch^{2r}\|u\|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

Hinweis: Man betrachte das Funktional

$$J(\phi) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi\, dx$$

und betrachte das duale Problem

$$(\nabla\phi, \nabla z) = J(\phi).$$

Wie sieht die rechte Seite des zugehörigen starken Problems aus? Welche Regularität ist für z zu erwarten (im Vergleich zu u)?

Besprechung der Übungen in der kommenden Woche.
Abgabe zur Korrektur und für Feedback per Mail an `thomas.richter@ovgu.de`.