Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter

26.05.2023

thomas.richter@ovgu.de

Übung Nr. 6 zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2023

Aufgabe 6.1: Man lese Abschnitt *7.8 Das CG-Verfahren* aus *Richter, Wick, Einführung in die Numerische Mathematik* (online in der UB). Das meiste war Thema letzter Woche. Die Konvergenzanalyse startet in Anschluss an *Satz 7.33 CG als direkte Methode*.

1. Hier versuche man insbesondere den Zusammenhang zwischen der Fehlerabschätzung und der Polynom-Approximation, also (7.20) nachzuvollziehen. Was für ein Polynom muss gefunden werden.

2. Hilfsatz 7.34 übersetzt diese Aufgabe in eine, die mathematisch besser zu fassen ist. Die gesuchte Polynomschranke ergibt sich durch die Auswertung des Polynoms an den Eigenwerten der Matrix. Gesucht ist dann das Polynom $q \in P_k$ mit $q(0) = 1$, welches im Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ möglichst minimal ist.

   Man versuche die Aufgabe (evtl. einfach graphisch) für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ im Fall P_1, P_2 und P_3 zu lösen.

3. Der formale Konvergenzbeweis erfordert die Tschebycheff-Approximation. Dies ist die Bestapproximation in der Max-Norm. Bei Interesse können Sie gerne den Abschnitt im Skript über die Tschebycheff-Approximation nachlesen.

Aufgabe 6.2:

Im Skript Finite Elemente lese man Abschnitt *3.6* bis einschließlich *3.6.1 Residuenbasierte Fehlerschätzer* bis Seite 109.

1. Der Unterschied zwischen a priori Fehlerschätzung und a posteriori Fehlerschätzung ist, dass bei dem a priori Zugang nur Informationen eingehen, die vor der diskreten Berechnung verfügbar sind, also z.B. die rechte Seite f und das Gebiet Ω. Bei der a posteriori Abschätzung geht insbesondere die schon berechnete Lösung u_h ein.

   Eine a priori Abschätzung ist normalerweise eine recht grobe Schranke, eine a posteriori Abschätzung soll möglichst nahe am echten Fehler sein und soll insbesondere auch Berechenbar sein. D.h., es sollen möglichst keine Konstanten eingehen, die wir nicht kennen. Ganz lässt sich dies meist nicht vermeiden.

2. Was ist das Residuum der Finite Elemente Lösung und in welchem Zusammenhang steht es zum Fehler?

3. Das Residuum $R_h(u_h)(\phi)$ kann für jedes ϕ berechnet werden. Warum können wir nicht so einfach die H^{-1}-Norm des Residuums $\|R_h(u_h)\|_{-1}$ berechnen?

4. Die Lösung u_h ist in Ω_h stetig. Warum gibt es dennoch einen Kantensprung $[n_E \cdot \nabla u_h]$?

5. Im Beweis zu Satz 3.57 wird die *Clement-Interpolation* verwendet. Für diese gelten die Abschätzungen

$$\|\phi - C_h\phi\| \in ch\|\nabla\phi\|, \quad \|\phi - C_h\phi\|_{L^2(E)} \in ch^{\frac{1}{2}}\|\nabla\phi\|.$$

   Von der Ordnung her ist dies das gleiche Ergebnis, das wir auch mit dem Bramble-Hilbert-Lemma und der Lagrange-Interpolation erwarten würden. Warum aber können wir hier nicht die Standard-Interpolation verwenden und müssen den Umweg über die Clement-Interpolation nehmen (die wir noch im Detail besprechen werden)? Tipp: es hat etwas mit der Regularität zu tun und den speziellen Eigenschaften des Raums H^1.

6. Warum ist es interessant, eine *Lokalisierung* des a posteriori Fehlerschätzers (3.34) zu erhalten? Was können wir hiermit machen?

Aufgabe 6.3: Wiederholung

1. Was ist die Laplace-Gleichung?

2. Unter welchen Bedingungen existiert eine Lösung der Laplace-Gleichung? In welchem Funktionenraum liegt sie?

3. Was bedeutet $H_0^1(\Omega)$? Was sind die Eigenschaften dieses Raumes?

4. Was ist die Poincaré-Ungleichung? Wann gilt sie?

5. Was bedeutet die Spur-Abschätzung?

6. Angenommen $\Omega \in \mathbb{R}^3$ sei eine Kugel und $f \in H^4(\Omega)$. Welche Regularität hat die Lösung der Laplace-Gleichung $-\Delta u = f$?

7. Was bedeutet "Galerkin-Verfahren"?

8. Was ist die Galerkin-Orthogonalität?

9. Was ist die Best-Approximationseigenschaft?

10. Wie ist die Konstruktionsidee von Finiten Elementen?

11. Wie sind die Freiheitsgrade bei quadratischen Dreieckselementen und wie bei biquadratischen Viereckselementen verteilt? Was sind die Knotenfunktionale?

12. Was bedeutet es, dass ein Polynomraum und ein Satz von Knotenfunktionalen unisolvent ist?

13. Was bedeutet Interpolation?

14. Angenommen ϕ_i für $i = 1, \dots, N$ ist die Langrange-Basis eines Finite Elemente Raumes. Was bedeutet dies? Und wie lässt sich dann die Interpolation $I_h u$ schreiben?

15. Ist die Lagrange-Interpolation für Funktionen $u \in H^1$ wohldefiniert?

16. Wie ist die allgemeine Interpolationsabschätzung für Finite Elemente von Grad r in der H^1-Seminorm?

17. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und wir interpolieren mit quadratischen Finiten Elementen. Welche Konvergenzordnung wird erwartet

$$
\begin{aligned}
\|u - I_h u\|_T &= O(h^?) \\
\max_{x \in \partial T} |u(x) - I_h u(x)| &= O(h^?) \\
\max_{x \in T} |\nabla(u(x) - I_h u(x))| &= O(h^?) \\
\|u - I_h u\|_{L^2(\partial T)} &= O(h^?)
\end{aligned}
$$

18. Was sind die Schritte zur a priori Energiefehlerabschätzung?

19. Was ist der Aubin-Nitsche Trick?

20. Wie konvergiert die quadratische Finite Elemente Methode in der L^2-Norm. Welche Regularität muss die Lösung dafür haben?

21. Welche Eigenschaft muss eine Matrix A erfüllen, dass sich die Lösung des LGS $Ax = b$ äquivalent als Lösung einer Minimierungsaufgabe schreiben lässt? Wie sieht die zu minimierende Form aus?

22. Was ist die Konditionszahl einer Matrix, wo geht sie ein?

23. Im R^n sind alle Normen äquivalent. Warum ist es in der Numerik dennoch oft wichtig, dass zwischen verschiedenen Normen unterschieden wird?

24. Wie steigt der Aufwand zum Lösen des linearen Gleichungssystems mit der LR-Zerlegung in Abhängigkeit von der Schrittweite h bei zwei- und wie bei dreidimensionalen Problemen?

25. Was ist die Idee des Gradientenverfahrens?

26. Welche Weiterentwicklung führt zum Verfahren der konjugierten Gradienten?

Besprechung der Übungen in der kommenden Woche.
Abgabe zur Korrektur und für Feedback per Mail an `thomas.richter@ovgu.de`.