Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung mit irregulären Anfangsdaten

Wir betrachten die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t(x,t) - a \cdot \Delta u(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x)\big|_{t=0} = u^0 & \text{in } \Omega \\ u(t)\big|_{\partial\Omega} = 0 & \text{auf } (0,\infty) \end{cases} \tag{1}$$

mit
↳ $\Omega \subset \mathbb{R}^M$, $M \geq 1$, offenes, beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$
↳ $a > 0$ konstant
↳ $u^0 \in L^2(\Omega)$ (u^0 muss nicht klassisch differenzierbar und nichtmal stetig sein)

Die WLG (1) hat eine eindeutige Lösung u. Aufgrund der Glättungseigenschaft der homogenen WLG ist u auch für irreguläre Anfangsdaten u^0 glatt $\forall\, t > 0$.

Diskretisierung von (1): ↳ zuerst Diskretisierung des Raums
↳ anschließend Diskretisierung in Zeit

Im Folgenden: $\|\cdot\| := \big(\int\limits_\Omega |\cdot|^2 \, dx\big)^{\frac{1}{2}}$ (L^2-Norm auf Ω)

Räumliche Diskretisierung

↳ Finite-Elemente-Galerkin-Verfahren der Ordnung $m \geq 2$
↳ $S_h \subset L^2(\Omega)$ ist Finite-Elemente-Raum mit Gitterweite h
↳ Diskretisierung des AD u^0: u_h^0 ist L^2-Projektion von u^0 auf S_h
↳ Für Fehler der räumlichen Diskretisierung $u_h \in S_h$ gilt folgende Abschätzung für $t > 0$:

$$\|u(t) - u_h(t)\| \leq C \cdot h^m t^{-\frac{m}{2}} \|u_h^0\| \quad \text{(Beweis siehe [3])}$$

↳ Matrix A_h ist diskretes Analogon des Differentialoperators $-a\Delta$
↳ alle Eigenwerte von A_h sind positiv: $0 < \lambda_1^h \leq ... \leq \lambda_N^h$, $N = N(h) \approx \frac{1}{h^2}$

Diskretisierung in der Zeit

↳ im Raum diskrete WLG ist sehr steifes Problem:

$$\frac{\max\limits_{1\leq i\leq N} \lambda_i^h}{\min\limits_{1\leq i\leq N} \lambda_i^h} \approx \frac{1}{h^2}$$

↳ Für Zeitdiskretisierung muss daher ein mindestens A-stabiles Verfahren genutzt werden.

↳ Betrachte die Trapezregel und das implizite Euler-Verfahren als Vertreter diagonaler und subdiagonaler Padé-Approximationen der Exponentialfunktion.

↳ Padé-Approx. $R_{\nu\mu} = \dfrac{p_{\nu\mu}}{q_{\nu\mu}}$, $\nu, \mu \geq 0$, $p_{\nu\mu} \in P_\nu$, $q_{\nu\mu} \in P_\mu$, ist beste rationale Approx. einer Funktion $f \in C^{\nu+\mu+1}$

↳ Padé-Approx. sind eindeutig und konvergieren mit optimaler Ordnung

↳ Padé-Approx. von e^{-z} konvergiert für $z \geq 0$ mit Ordnung $s = \nu + \mu$:

$$R_{\nu\mu}(z) = e^{-z} + \mathcal{O}(|z|^{\nu+\mu+1}), \text{ also } |e^{-z} - R_{\nu\mu}(z)| \leq C \cdot |z|^{\nu+\mu+1}$$

↳ diagonale Padé-Verfahren: $\nu = \mu$, subdiagonale Padé-Verfahren: $\nu = \mu - 1$

Trapezregel (Crank-Nicolson-Verfahren)

↳ implizites Einschrittverfahren: $u_n = u_{n-1} + \frac{k}{2} \cdot f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{k}{2} \cdot f(t_n, u_n)$

↳ diagonales Padé-Verfahren $R_{11}(z) = \frac{1-z/2}{1+z/2}$ der Ordnung $s = 2$

↳ Diskretisierung von $u_h(t)$ in Zeit mit Schrittweite k:

$$U_{h,k}^n = \frac{I_h - \frac{k}{2} A_h}{I_h + \frac{k}{2} A_h} \cdot U_{h,k}^{n-1}, \;\; U_{h,k}^n \in S_h$$

↳ Problem: diagonale Padé-Verfahren sind "nur" A-stabil

↳ Hochfrequente Anteile aus irregulären AD werden nur unzureichend gedämpft und Fehler durch die Zeit getragen. So kann es zum drastischen Genauigkeitsverlust der Zeitdiskretisierung im gesamten Zeitintervall kommen.

↳ Um dies zu verhindern, ist Einschränkung der Schrittweite k nötig: $k \sim h^2$

implizites Euler-Verfahren

↳ implizites Einschrittverfahren: $u_n = u_{n-1} + k \cdot f(t_n, u_n)$

↳ subdiagonales Padé-Verfahren $R_{01}(z) = \frac{1}{1+z}$ der Ordnung $s = 1$

↳ Diskretisierung von $u_h(t)$ in Zeit mit Schrittweite k:

$$U_{h,k}^n = \frac{1}{I_h + k A_h} \cdot U_{h,k}^{n-1}, \;\; U_{h,k}^n \in S_h$$

↳ subdiagonale Padé-Verfahren sind stark A-stabil

↳ Fehleranteile aus irregulärem AD werden exponentiell gedämpft.

↳ Schrittweite k kann beliebig gewählt werden, da keine Einschränkung von k in Abhängigkeit von h nötig ist.

Für das implizite Euler-Verfahren ist keine Schrittweitenbeschränkung wie bei der Trapezregel nötig, jedoch konvergiert die Zeitdiskretisierung $U_{h,k}^n$ mit höherer Ordnung, wenn sie mit der Trapezregel berechnet wird.
Kann die Schrittweitenbeschränkung $k \sim h^2$ für die Trapezregel umgangen werden?

Satz **(Glättungsverfahren für die Trapezregel)**
Wenn bei der Zeitdiskretisierung der WLG (1) *mit der Trapezregel die ersten* 4 *Schritte durch* 4 *implizite Euler-Schritte ersetzt werden, gilt für beliebige Wahl der Zeitschrittweite k folgende "Glättungsabschätzung":*

$$\|u_h(t_n) - U_{h,k}^n\| \leq C \cdot k^2 t_n^{-2} \|u_h^0\|\,,\ t_n = nk > 0$$

Bemerkungen:
Die globale Ordnung $s = 2$ bleibt erhalten, da nur endlich viele implizite Euler-Schritte mit niedrigerer Ordnung durchgeführt werden.

Ähnliche Resultate erhält man auch für...
↳ ... diagonale Padé-Verfahren höherer Ordnung:
Ersetze die ersten 2μ der diagonalen (μ, μ)-Padé-Schritte durch subdiagonale $(\mu - 1, \mu)$-Padé-Schritte. Dann gilt, ohne dass die globale Ordnung $s = 2\mu$ beeinflusst wird:

$$\|u_h(t_n) - U_{h,k}^n\| \leq C \cdot k^{2\mu} t_n^{-2\mu} \|u_h^0\|\,,\ t_n = nk > 0 \quad \text{(Beweis siehe [2])}$$

↳ ... inhomogene WLG $u_t - a \cdot \Delta u = f$ in $\Omega \times (0, \infty)$
↳ ... inhomogene Randdaten $u|_{\partial\Omega} = g$ auf $(0, \infty)$
↳ ... Irregularitäten in Randdaten $u|_{\partial\Omega}$, also z.B. Unstetigkeiten in der Zeit
↳ ... zeitabhängigen Koeffizienten $a = a(t)$
↳ ... komplexere Differentialoperatoren

Literatur

[1] Rannacher, R. (1982). Discretization of the Heat Equation with Singular Initial Data. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 62, T346-T348.

[2] Rannacher, R. (1984). Finite Element Solution of Diffusion Problems with Irregular Data. *Numerische Mathematik* 43, 309-327.

[3] Luskin, M. & Rannacher, R. (1982). On the Smoothing Property of the Galerkin Method for Parabolic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis, 19*(1), 93-113.